7.1 统计推断 2019年8月15日09点53分

定义7.1.2 统计推断 统计推断是产生关于统计模型部分或所有概率的陈述过程。

定义7.1.3 参数/参数空间 在统计推断问题中，用于决（确）定目标随机变量联合分布的特征或组合特征被称为分布参数. 参数所有可能值的集合或参数向量被称为参数空间.

定义7.1.4 统计 假设目标可观测的随机变量是. 设r是任意n个实数变量的实值函数. 则随机变量被称为统计.

7.2 先验和后验分布

定义7.2.1 先验分布/p.f/p.d.f 假设有一个参数为的统计模型. 如果是随机的，则在观察其它目标随机变量之前为分配的分布被称为先验分布. 如果参数空间是可数的，则先验分布是离散的并且它的p.d.f.被称为先验p.f. 如果先验分布是连续的，则它的p.d.f.被称为先验p.d.f. 我们使用符号来标记先验p.f.或先验p.d.f.作为的函数.

当我们将参数视为随机变量时，名称“先验分布”仅仅是参数边际分布的另一个名称。

定义7.2.2 后弦分布/p.f./p.d.f. 考虑一个参数为的统计推断，并且已经观察到随机变量. 在给定条件下的条件分布被称为后验分布. 在给定条件下的条件p.f.或p.d.f.被称为的后验p.f.或后验p.d.f.并且被标记为.

当我们将参数视为随机变量时，名称“后验分布”仅仅是在给定数据情况下参数条件分布的另一个名称。

定理7.2.1假设某个分布的p.d.f或p.f.为, 从该分布中选取n个随机变量. 同样假设参数值未知且的先验p.d.f.或p.f.为. 则的后验p.d.f.或p.f.为

其中是的边际联合p.d.f或p.f.

定义7.2.3 似然函数 当随机样点中观察联合p.d.f.或联合p.f. 在给定值条件下作为函数，该函数被称为似然函数.

7.3 共轭先验分布 2019年8月28日09点58分

定理 7.3.1 假设从参数为的伯努利分布中选取n个随机样本, 其中. 同样假设先验分布是参数为的贝塔分布. 则在给定条件下后验分布是参数为和的贝塔分布.

定义 7.3.1 共轭族/超参数 设,是给定下的条件i.i.d，并且它们的共同p.f.或p.d.f.为. 设是参数空间上的可能分布族. 假设先验分布不论从怎样选取，无论选取多少观察样本，同样，无论观察值是什么, 后验分布始终是成员. 则被称为来自分布的样本的先验分布共轭族. 族也被称为自分布的闭采样(closed under sampling). 最终，如果中的分布被其它参数参数化, 则于先验分布关联的参数被称为先验超参数，于后验分布关联的参数被称为后验超参数.

定理7.3.2 假设从参数为的泊松分布中选取n个随机样本, 其中未知. 同样假设先验分布是参数为的伽马分布. 则在给定条件下后验分布是参数为和的伽马分布.

定理7.3.3 假设从均值, 方差的正态分布中选取n个随机样本，其中和未知. 同样假设先验分布是均值为, 方差为的正态分布. 则在给定条件下后验分布是均值为, 方差为的正态分布. 其中

定理7.3.4 假设从参数为的指数分布中选取n个随机样本, 其中未知. 同样假设先验分布是参数为的伽马分布. 则在给定条件下后验分布是参数为和的伽马分布.

定义7.3.2 不正常先验(Improper Prior) 设是一个非负函数，其定义域包含统计模型的参数空间. 假设. 如果我们假装是先验p.d.f., 则我们对于使用了一个不正常先验.

7.4 贝叶斯估算器 2019年8月29日10点18分

定义7.4.1 估算器/估值 设是一组观察数据，其联合分布是由从实数子集中取值的参数决定的. 参数的估算器是一个实值函数. 如果被观察到，则被称为的估值.

定义7.4.2 损失函数 损失函数是二元变量的实值函数, 标记为, 其中是一个实数. 该函数的意义是当参数等于且估值等于时的统计损失.

定义7.4.3 贝叶斯估算器/估值 设是一个损失函数. 对于的每一个可能值, 设是一个值使得最小化. 则被称为的贝叶斯估算器. 一旦=被观察到，被称为

贝叶斯估值.

定义7.4.4 平方误差损失函数

推论7.4.1 设是一个实值参数. 假设平方误差损失函数(7.4.4)被使用，并且后验均值是有限的. 则贝叶斯估算器是.

定义7.4.5 绝对误差损失函数

推论7.4.2 当绝对误差损失函数被使用时，实值参数的贝叶斯估算器等于后验分布的中位数.

定义7.4.6 一致估算器 在情况下，一组估算器概率收敛于被估算参数的未知值被称为一致估算序列。

定义7.4.7 估算器/估值 设是一组观察数据，其联合分布是由从维空间子集中取值的参数决定的. 设是从到维空间的函数. 定义. 估算器是一个从维空间取值的函数. 如果被观察到，则被称为的估值.

7.5 最大似然估算器 2019年8月30日10点50分

定义7.5.2 最大似然估算器/估算 对每一个可能的观察向量, 设在情况下使得似然函数最大化, 设为定义在这种方式下的的估算器. 估算器被称为的最大似然估算器. 当被观察时，值被称为的最大似然估值.

7.6 最大似然估算器的属性 2019年9月2日10点43分

定理7.6.1 M.L.E.的不变性 如果是的最大似然估算器并且g是一对一函数，则是的最大似然估算器.

定义7.6.1 M.L.E.函数 设是参数的任意函数, 并且设G是在函数g下的图像. 对于每一个, 定义和

最终，定义的M.L.E，其中

定理7.6.2 设是的M.L.E. 设是关于的函数. 则的M.L,E是.

定义7.6.3 矩方法 假设从k维参数的分布中选取n个随机变量, 并且该分布至少包含k个有限矩. 当 设. 假设函数是一对一函数. 设是其反函数，对于所有的，

通过定义样本矩, 其中 矩估算器方法是.

定理7.6.3 假设是i.i,d, 其分布是由k维参数向量决定的. 假设该分布对于所有前k个矩存在且均为有限值. 同样假设定义在7.6.3中的反函数M是连续的. 则基于矩估算器方法的序列是估算器是连贯序列.

7.7 充分统计量 2019年9月4日10点21分

定义7.7.1 充分统计量 设是随机样本，来自参数为的分布. 设T是一个统计量. 假设对于每一个和T的每一个t值, 在给定T=t条件下的条件联合分布只依赖t而不依赖. 也就是说，对于每一个t值, 在给定T=t条件下的条件分布对于任意值保持不变. 则我们称T是参数的充份统计量.

定理7.7.1 因式分解 设是连续分布或离散分布的随机样本，该分布的p.d.f.或p.f.为, 其中值是未知的并且属于给定的参数空间. 统计量是充分统计量当且仅当的联合p.d.f.或联合p.f. 对于所有的值和所有的值可以被分解称如下公式：

函数和是非负的，可能依赖但是不依赖，依赖于但是依赖通过统计量观察到的值.

推论7.7.1 统计量是充分的当且仅当无论使用哪种先验分布，后验分布只依赖通过T值的观察数据.

7.8 联合充分统计量 2019年9月5日10点12分

定义7.8.1 联合统计量 对于每一个和每一个的可能值, 假设在给定条件下的条件联合分布不依赖值. 则被称为的联合充分统计量.

定理7.8.1 联合充分统计量的因式分解 设是n个实变量函数. 统计量是的联合充分统计量当且仅当联合p.d.f.或联合p.f. 对于所有的值和所有的值可以被分解称如下公式：

定义7.8.2 有序统计量 假设是某个分布中的样本空间. 设是这些随机样本中最小值, 设是第二最小值，是第三最小值，一次类推. 在这种方式中, 表示样本中最大值, 表示下一个最大值. 随机变量被称为样本的有序统计量.

定理7.8.2 有序统计量在随机样本中是充分的 设是某个分布中的样本空间, 该分布p.d.f.或p.f.是. 则有序统计量对于是联合充分的.

定义7.8.3 极小（联合）充分统计量 统计量是极小充分统计量当且是充分的并且是其它充分统计量的函数. 统计向量是极小充分统计量当且是充分的并且是其它充分统计量的函数.

定理7.8.3 M.L.E和充分统计量 设对于是充分统计量. 则的M.L.E. 仅依赖通过统计量的观察数据.

定理7.8.4 贝叶斯估算器和充分统计量 设对于是充分统计量. 则的每一个贝叶斯估算器 仅依赖通过统计量的观察数据.

8 估算的抽样分布

8.1 统计量的抽样分布 2019年9月6日10点08分

定义8.1.1 抽样分布 假设从参数未知的分布中选取一个随机向量. 设是和任意可能的函数. 即. 的分布被称为的抽样分布. 我们使用符号表示从该分布中所计算的的均值.

8.2 卡方分布 2019年9月9日10点05分

定义8.2.1 分布 对于每一个正数, 参数, 的伽马分布被称为自由度为的分布. 其p.d.f.为

当时, .

定理8.2.1 均值和方差 如果随机变量X是自由度为的分布, 则并且.

定理8.2.2 如果随机变量是独立的并且假设是自由度为的分布, 则之和是自由度为的分布.

定理8.2.3 设是标准正态分布. 则随机变量是自由度为1的分布.

推论8.2.1 如果随机变量是符合标准正态分布的i.i.d., 则平方和是自由度为m的分布.

8.3 采样均值和采样方差的联合分布 2019年9月9日10点42分

定理8.3.1 假设从均值为, 方差为的正态分布中选取随机样本. 则样本均值和样本方差是独立随机变量, 是均值为, 方差为的正态分布, 是自由度为n-1的分布.

定理8.3.4 假设随机变量是i.i.d并且每一个都是标准正态分布. 假设A是一个正交矩阵, 且. 则随机变量同样也是i.i.d., 且每一个也都是标准正态分布，且.

8.4 t分布. 2019年9月10日10点29分

定义8.4.1 考虑两个独立随机变量和, 是自由度为m的分布, 是标准正态分布. 假设随机变量被定义为下列公式

则的分布被称为自由度为m的t分布.

定理8.4.1 概率密度函数. 自由度为m的t分布的p.d.f.是

定理8.4.2 假设从均值为, 方差为的正态分布中选取随机样本. 设为样本均值，定义

则是自由度为n-1的t分布.

8.5 置信区间 2019年9月10日11点34分

定义8.5.1 置信区间 设是从某个参数(或参数向量)为的分布中选取的一个样本. 设是的实值函数. 设是两个统计量并且对于所有的值满足下列属性,

则随机区间被称为的系数置信区间或100百分比置信区间.

定理8.5.1 正态分布均值的置信区间 假设从均值为, 方差为的正态分布中选取随机样本. 对于每一个, 闭区间恰好是的系数置信区间：

定义8.5.2 单边置信区间 设是从参数(或参数向量)为的分布中选取的一个样本. 设是的实值函数. 设是一个统计量并且对于所有的值满足下列属性,

则随机区间被称为的单边系数置信区间或单边100百分比置信区间. 同样, 也被称为的系数下界置信区间或100百分比下界置信区间. 类似的，如果B是一个统计量使得

则是的单边系数置信区间或单边100百分比置信区间, 并且B是的系数上界置信区间或100百分比是界置信区间. 如果不等式“”对于所有的满足公式(8.5.5)或公式(8.5.6)，那么相应的置信区间和置信极限被称为恰好.

定理8.5.2 正态分布均值的单边置信区间 假设从均值为, 方差为的正态分布中选取随机样本. 对于每一个, 下列统计量恰好分别是的上界和下界系数置信区间：

定义8.5.3 枢轴 设是从参数(或参数向量)为的分布中选取的一个样本. 设是一个随机变量其分布与一致. 则被称为枢量(或简称为枢轴).

定理8.5.3 来自枢轴的置信区间 设是从参数(或参数向量)为的分布中选取的一个样本. 假设枢轴存在. 设是的c.d.f., 假设G是连续的. 假设公式(8.5.7)中的函数存在，并且假设对于每一个在上是严格递增的. 设使得. 则下列统计量是恰好系数置信区间的端点：

如果对于每一个在上是严格递减的, 则需要交换和的定义.

8.6 正态分布样本的贝叶斯分析

定义8.6.1 正态分布的精度 正态分布的精度被定义为方差的倒数，即.

定理8.6.1 假设从均值为, 未知精度为的正态分布中选取随机样本. 同样假设和的联合先验分布定义如下：在给定的条件下的条件分布是均值为,精度为的正态分布, 并且的边际分布是参数为和的伽马分布. 则在给定条件下，和的联合后验分布定义如下: 在给定条件下的条件分布是均值为,精度为的正态分布，其中

且的边际分布是参数为和的伽马分布, 其中

定义8.6.2 正态伽马分布族 设和是随机变量. 假设在给定条件下的条件分布是均值为, 精度为的正态分布. 同样假设的边际分布是参数为和的伽马分布. 则我们说和的联合分布是混合参数为的正态伽马分布.

定理8.6.2 均值的边际分布. 假设和的先验分布是混合参数为的正态伽马分布. 则的边际分布与t分布有如下方式的关系：

即，的边际分布是自由度为2的t分布.

定理8.6.3 假设和是混合参数为的联合正态伽马分布. 如果, 则. 如果, 则

8.7 无偏移估算器 2019年9月12日10点34分

定义8.7.1 无偏移估算器 估算器是参数函数的无偏移估算器当且对每一个都成立. 其它估算器则被称为偏移估算器. 估算器期望值与之间的差值被称为估算器的偏移量. 也就是说, 作为估算器的偏移等于, 并且是无偏移的当且仅当偏移值对所有的恒等于0.

推论8.7.1 设是有限方差估算器. 则作为的估算器的M.S.E等于其方差加上偏差的平方.

定理8.7.1 一般分布的采样 设是从参数(或参数向量)为的分布中选取的一个样本. 假设分布的方差是有限的. 定义. 下列统计量是方差的无偏移估算器:

8.8 费希尔信息 2019年9月13日09点28分

定义8.8.1 随机变量中的费希尔信息 设X是一个随机变量其分布依赖于参数, 取值于实线开区间. 设X的p.f.或p.d.f.为. 假设使得的的集合对于所有的值都一样, 并且作为的函数是两次可微分的. 则费希尔信息在随机变量X中被定义为:

因此, 如果是一个p.d.f., 则

其中

定理8.8.1 根据定义8.8.1的条件. 同样, 假设对于的二阶导数可以通过反转积分和微分的顺序来计算. 则费希尔信息等于

费希尔信息另一个表达式是

定义8.8.2 随机样本中的费希尔信息 假设是从p.f.或p.d.f.为的分布中选取的一组随机样本, 其中值必须位于实线开区间上. 设是X的联合p.f.或联合p.d.f. 定义

假设使得的集合对于所有的值都是一样, 并且作为的函数是二次可微分的. 则费希尔信息在随机样本中定义为

对于连续分布, 费希尔信息在整个样本中由下列n维积分定义：

对于离散分布, 把n维积分替换称n个累加之和.

额外的, 我们再次假设导数可以在积分下通过, 则我们可以把用下列两种方式表达：

或

定理8.8.2 在定义8.8.1.和8.8.2条件下, 存在

定理8.8.3 克拉美-罗不等式 假设是从p.d.f.为的分布中选取的一组随机样本. 同样假设所有关于的假设都是连续的. 设是一个有限方差的统计量. 设. 假设是关于的可微分函数. 则

公式等号成立当且仅当存在函数和可能依赖但不依赖并且满足关系

推论8.8.1 无偏估算器方差的克拉美-罗下界 在定理8.8.3的假设条件下. 设是的无偏估算器. 则

定义8.8.3 有效估算器 估算器被称为期望的有效估算器当且公式对于所有的存在等号成立.

定理8.8.4 有效估算器的渐进分布. 在定理8.8.3的假设条件下. 设是其均值的有效统计量. 假设从不为0. 则

的渐进分布是标准正态分布.

定理8.8.5 M.L.E的渐进分布 假设在任意问题中M.L.E. 是通过求解等式得到的, 并且额外的二阶导数和三阶导数都存在并满足特定条件. 则的渐进分布是标准正态分布.

定理8.8.6 有效估计 在定理8.8.5中关于似然函数的假设条件下, 假设是估算器的一个序列使得在分布上收敛于某些分布(具体是哪些分布并不重要). 使用作为开始值并朝着发现 M.L.E的方向执行一步牛顿法. 将这一步的结果称为. 则的渐进分布是标准正态分布.

定义8.8.4 向量参数的费希尔信息 假设是从p.d.f.为的分布中选取的一组随机样本, 其中参数的值必须位于维实数空间的开区域中. 设是的联合p.d.f.或联合p.f. 定义

假设使得的集合对于所有的值都是一样, 并且作为的函数是二次可微分的. 则费希尔信息矩阵在随机样本中被定义为矩阵, 元素等于

维实数空间的克拉美-罗不等式：

同样，当公式等号成立当且仅当是下列向量的线性函数:

第九章 假设验证

9.1 假设验证的问题 2019年9月16日10点24分

**定义9.1.1 零假设和备择假设** 考虑一个包含参数的统计问题, 其中未知且位于特定的参数空间. 现假设被分割称两个不同子集和, 统计者想要知道是否位于或. 设表示的假设, 表示的假设. 因为子集和是离散的并且, 因此假设和只能有一个为真. 而统计者必须决定哪一个为真. 这类有两种（可能）决策的问题被称为*假设验证*. 决定选择哪个假设的过程为称为*验证过程*或简称为*验证.* 我们一般将称为零假设, 称为备择假设. 当执行一个验证, 如果我们决定位于, 则我们说拒绝. 如果我们决定位于, 我们说不拒绝.

**定义9.1.2 简单和复合假设** 如果只包含单个值, 则被称为简单假设. 如果包含不止一个值, 则被称为复合假设.（其中）. 例如, 一个简单的零假设的形式必须是

**定义9.1.3 单面和双面假设** 设是一个一维参数. 单面零假设的形式为, 其对应的单面备择假设是. 当零假设是简单的，如公式(9.1.1)所示, 那么备择假设通常是双面的, 即.

一般的，考虑我们想要验证下列假设：

假设统计员在选取假设之前, 她从未知参数为的总体分布中观察到了一个随机样本. 我们设为维随机向量的样本空间. 换句话说, 是所有可能随机样本的集合. 在这种类型的问题中, 统计员可以通过将分割称两个子集来设定测试过程. 子集包含拒绝的值, 另一个子集包含不拒绝的值.

**定义9.1.4 临界域** 上述所定义的集合被称为测试的临界域.

**定义9.1.5 统计测试/拒绝域** 设是一个随机变量, 其分布依赖参数. 设是一个统计量, 设是实数线的子集. 假设对于公式(9.1.3)的测试过程的形式是“如果则拒绝.” 则我们称是统计测试, 称是拒绝域. 定义9.1.4中的集合就是临界域.

**定义9.1.6 幂函数** 设是一个测试过程. 函数被称为测试的幂函数. 如果代表的临界域, 则幂函数为:

如果用统计测试和拒绝域来表示, 那么幂函数为

定义9.1.7 我们在做假设检验的时候会犯两种错误：第一，原假设是正确的，而你判断它为错误的；第二，原假设是错误的，而你判断它为正确的。我们分别称这两种错误为第一类错误(Type I error)和第二类错误(Type II error). 其中原假设是指零假设.

用幂函数表示, 如果, 是统计者犯第一类错误的概率. 相似地, 如果, 是犯第二类错误的概率. 如果我们要在多个验证中选择一个. 我们可能会选择一个错误概率最小的验证. 也就是我们要选择一个幂函数对于是较低的, 并且我们希望对于是较大的. 一般情况下, 这两个目标是相对的. 也就是说, 如果我们选择使得对于是较小, 通常对于同样也是较小的. 因此需要折中这两个目标之间的平衡.

在两个目标之间平衡的最流行的方法是选择一个0和1之间的数字使得

**定义9.1.8 等级/大小** 满足的测试被称为等级测试，并且我们称该测试的等级大小为. 除此之外, 测试的大小定义为:

**推论9.1.1** 测试是等级测试当且仅当它的大小至多为. 如果零假设是简单的, 也就是, 则的大小将会是.